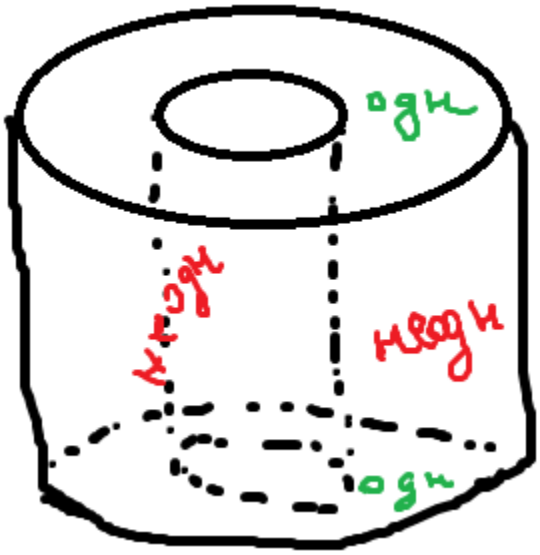
Боголюбов на лекциях знакомит с функциями Инфельда и Макдональда, но не объясняет, зачем они нужны.
Они могут всплыть при решении задачи 3 (ур-е Лапласа и неоднородные ГУ) в цилиндрической СК. Рассмотрим пример, который у нас остался с прошлой методичке: там у нас осталось ненайденной u_2:



Итак, какая для неё задача? У нас есть цилиндр радиусом b и высотой h.
На его однородные ГУ, а вот на боковой поверхности они будут неоднородными.
Ну, им придётся там быть неоднородными, потому что если и там одни будут однородными, то решение будет тривиальным, а это нам неинтересно ☺

Итак, Δu=0. Надо расписать оператор Лапласа в цилиндрических СК. Если u=U(r,φ)Z(z), то будет

$$\Delta u = \Delta(UZ) = Z\Delta_{r\varphi}[U] + U\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

где $\Delta_{r\varphi}$ - $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$, т.н. полярная часть лапласиана.

Делим переменные:

$$\frac{\Delta_{r\varphi}[U]}{U} + \frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = 0$$

Первое слагаемое не зависит от z, второе от r и φ=> оба константы. Надо понять, какая константа положительная, а какая отрицательная.

Опытный читатель уже сообразил, что $\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = const < 0$, т.к. вдоль z ГУ однородные. Для тех, кто не сообразил, чуть подробней: при z=0 и z=h ГУ однородные. Применяем старый мотив: если $\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = const > 0$, то это шинус и чосинус, которые не периодические и у нас при однородных ГУ будет только

тривиальное решение. Не подходит. А вот если $\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z} = const < 0$,, то это синус и косинус, где и при однородных ГУ будет существовать нетривиальное решение.

Пишем его (точнее, их – будет счётное число решений) и считаем $\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}{Z}$для них. Получим счётный набор отрицательных констант, которые обозначим как $-\nu_n^2$. Тогда

$$\Delta_{r\varphi}U/U=\nu_n^2$$

Это практически задача 2 для круга! Если мы это перепишем как

$$\Delta_{r\varphi}U- \nu_n^2*U=0$$

Сходство станет очевидным.

Но есть два отличия:

1) На месте λ у нас набор ***отрицательных*** констант

2) Неоднородные ГУ

Если бы ГУ были бы однородными, то решение было бы лишь тривиальным, потому что нам бы потребовались функции Бесселя и Неймана, а для них $\Delta_{r\varphi}U/U$ ***отрицательно.*** А у нас $\Delta_{r\varphi}U/U$ ***положительно!***

Тогда решениями будет другая ФСР – функции Инфельда и Макдональда.

Вот смотрите. Есть уравнение Бесселя, которое получается, если решать $\Delta_{r\varphi}U/U=-\nu^2$ (отрицательной константе)

$$z^2R'' - zR' + (\nu^2 - f^2z^2)R = 0$$

Его решением будет

$$A\,J_\nu(fz) + B\,N_\nu(fz)$$

А теперь рассмотрим похожее уравнение, которые мы получим, когда будем решать $\Delta_{r\varphi}U/U= \nu^2$ (положительной константе)

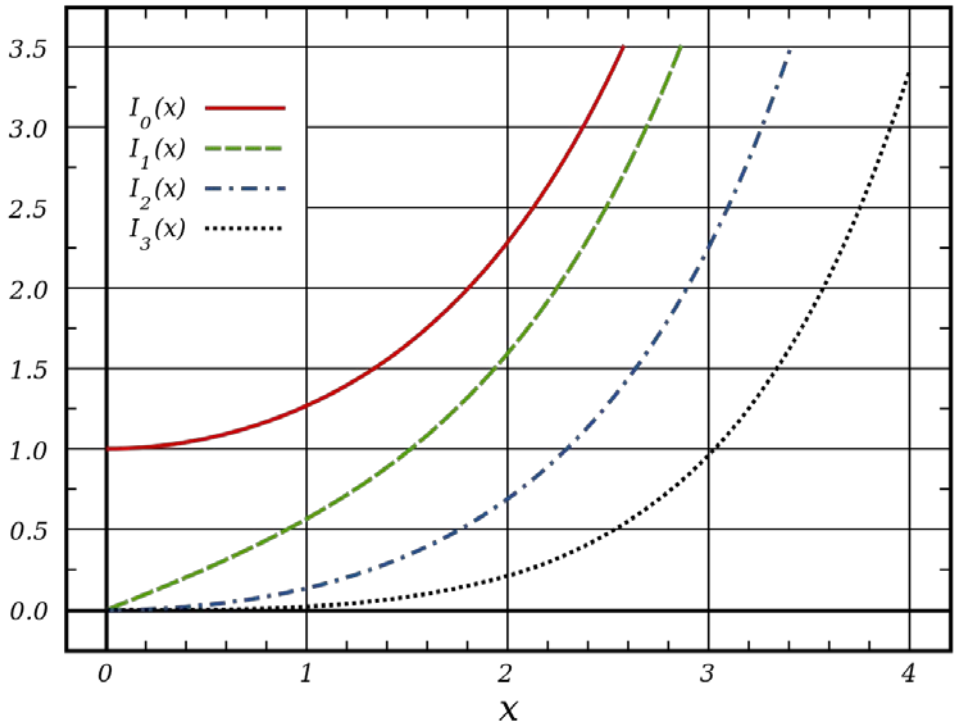
$$z^2R'' - zR' + (\nu^2 + f^2z^2)R = 0$$

Поменяли один знак, как раз при ν^2. Решением будет

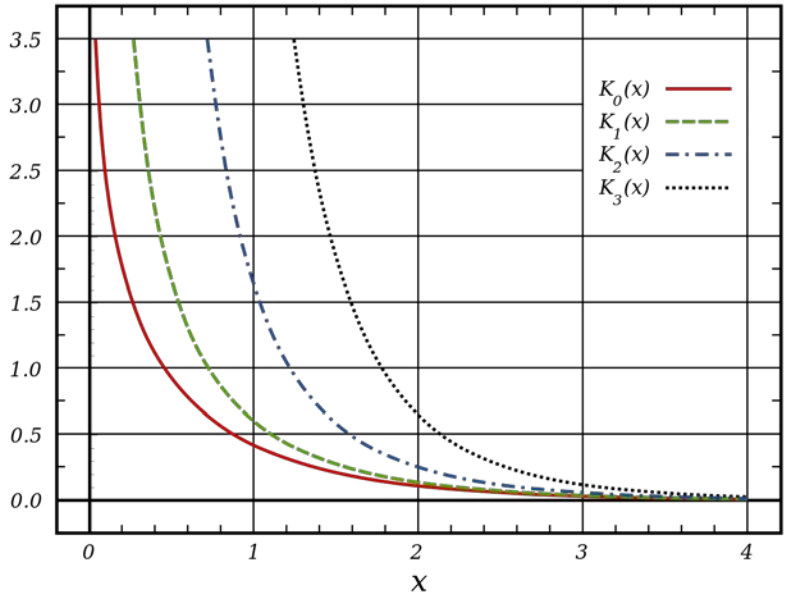
$$AI_\nu(fz) + BK_\nu(fz),$$

Немного другая ФСР.
I – функция Инфельда, K – функция Макдональда. Как и функции Бесселя и Неймана, они зависят и от аргумента (в скобках), и от параметра ν.

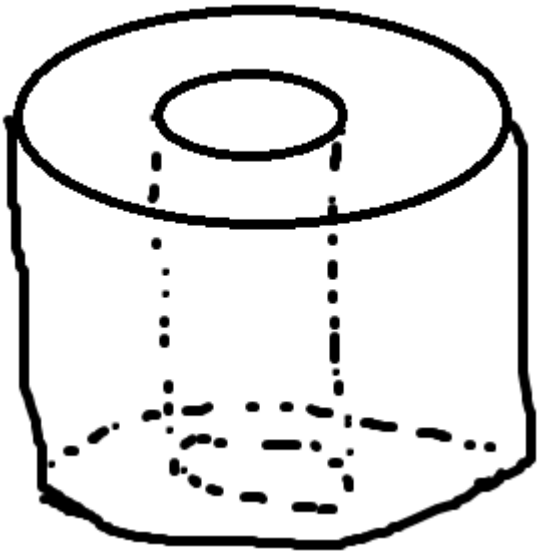
Посмотрим на их графики. Вот функции Инфельда



А вот функции Макдональда

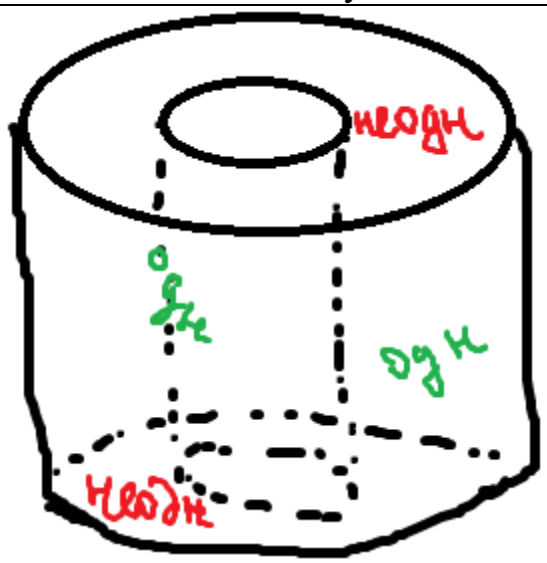
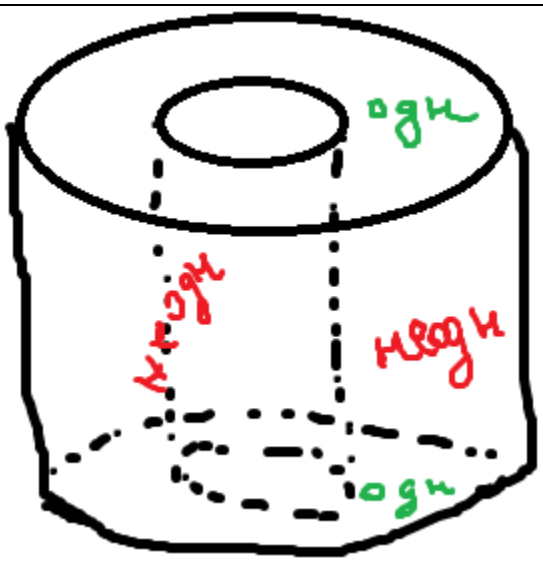


Кстати, а функция Макдональда у нас в нуле уходит на бесконечность! А значит, при решении задаче в цилиндре будет только функция Инфельда. А вот если у нас цилиндр, сквозь который просвистела пуля



То ФСР будет уже состоять и из Инфельда, и из Макдональда.

Отмечу, что при решении задач в ЦСК ***могут*** возникнуть функции Инфельда и Макдональда. Но могут и не возникнуть – всё зависит от ГУ.

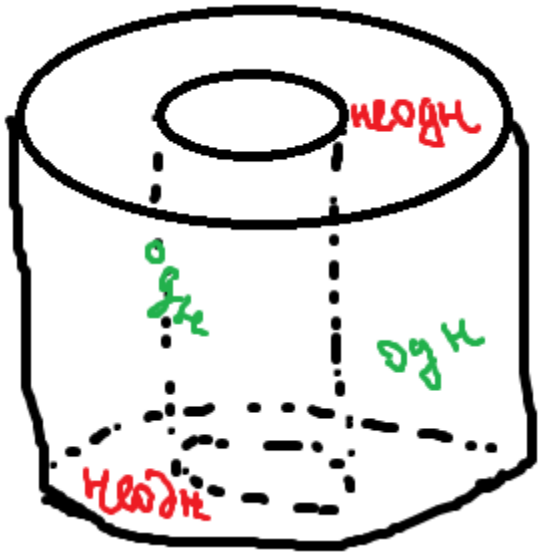
	
u_1	u_2
Бессель и Нейман, шинусы и чосинусы	синусы и косинусы, Инфельд и Макдональд

Если на донцах будут неоднородные ГУ, а сбоку однородные – то будет Бессель и Нейман с шинусами и чосинусами.

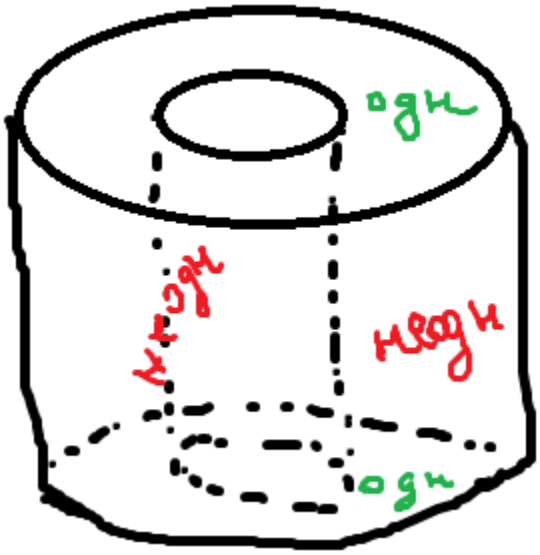
Если на донцах будут однородные ГУ, а сбоку неоднородные – то будет Инфельд и Макдональд с синусами и косинусами.

Давайте проведём мини-тест.
Вот вам варианты u:
1) Бессель, Нейман, шинусы и чосинусы
2) Бессель, Нейман, синусы и косинусы
3) шинусы и чосинусы, Инфельд и Макдональд
4) синусы и косинусы, Инфельд и Макдональд

и задачи в цилиндрической СК:
а) задача 2
б) задача 3 с такими ГУ:



в) задача 3 с такими ГУ:



г) такой задачи у нас ещё не было, данная u является решением задачи 4, т.е. задачи Гельмгольца.

Предлагаю читателю, не заглядывая никуда, провести соответствия. Ответ на следующей странице.

Ответ:
1в
2а
3г
4б

Насчёт 3г дам свои комментарии. И у шинусов-чосинусов, и у Инфельдов-Макдональдов оператор Буткарёва положителен. В уравнении Лапласа $\Delta u=0$ сумма операторов Буткарёва должна быть 0, что невозможно. В λ-уравнении $\Delta u+\lambda^2 u=0$ - меньше нуля. Вот и остаётся уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u - æ^2 u = 0, \text{что равносильно} \frac{\Delta u}{u} = æ^2$$